

प्रश्न-पत्र का स्वरूप

प्रश्न-पत्र में कुल 23 प्रश्न पूछे जायेंगे, जो निम्न प्रकार होंगे :-

(A) वस्तुनिष्ठ प्रश्न :- प्रश्न 1 से 5 तक कुल 32 वस्तुनिष्ठ प्रश्न प्रत्येक प्रश्न का अंक 1

(B) अति लघुत्तरीय :- प्रश्न 6 से 15 तक कुल 10 प्रश्न प्रत्येक प्रश्न का अंक 2

(C) लघुत्तरीय :- प्रश्न 16 से 19 तक कुल 04 प्रश्न प्रत्येक प्रश्न का अंक 3

(D) दीर्घ उत्तरीय :- प्रश्न 20 से 23 तक कुल 04 प्रश्न प्रत्येक प्रश्न का अंक 4

Note :- Sure-1 का अर्थ है कि प्रश्नों के ग्रुप में से एक निश्चित

अध्याय-1 [संबंध तथा फलन]

वस्तुनिष्ठ = 03
अंक 2 के प्रश्न = 1 } = 05 अंक

प्रश्न 6 (अंक 2 के प्रश्न) परीक्षा में प्रश्न क्रमांक 6 निम्न प्रश्न से पूछे जायेंगे

(a) सिद्ध करो कि समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ पर परिभाषित संबंध R है कि
 (i) $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$ केवल सममित है, जो सबसे छोटा सममित संबंध है
 (ii) $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ सममित है परन्तु न तो स्वतुल्य न संक्रामक है
 (iii) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$ केवल स्वतुल्य संबंध है

(b) सिद्ध करो कि समतल में स्थित रेखाओं का समुच्चय L में परिभाषित संबंध $R = \{(L_1, L_2) : L_1, L_2 \text{ पर लम्ब है}\}$ केवल सममित है, न तो स्वतुल्य, न संक्रामक है
 [Note :- लम्ब के स्थान पर समांतर लेने पर संबंध R तुल्यता संबंध होगा]

(c) जांच कीजिए कि समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में संबंध $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ स्वतुल्य, सममित या संक्रामक है [Note $b = a + 1$ की जगह $3 - b = 0$ लेकर भी "OK"]

Sure-1

प्रश्न 6 (d) यदि फलन $f(x) = x^2$ हो तो सिद्ध करो कि :-

(i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ न तो एकैकी है और न ही आच्छादक (Onto) है

(ii) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ एकैकी (One-one) है परन्तु आच्छादक (Onto) नहीं है

[Note :- $f(x) = x^2$ के स्थान पर $f(x) = x^2 + 1$, $f(x) = x^4$ लेने पर कोई परिवर्तन नहीं होगा]

(e) यदि रेखिक फलन $f(x) = 2x$ हो, तो सिद्ध करो कि :-

(i) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ एकैकी है परन्तु आच्छादक नहीं है [आच्छादक नहीं \rightarrow अन्वर्तनीय]

(ii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ एकैकी आच्छादक दोनों है अर्थात् द्विआजित (Bijective) होगा अर्थात् f व्युत्क्रमणीय होगा अर्थात् f^{-1} का अस्तित्व होगा

[Note :- $f(x) = 2x$ के स्थान पर $f(x) = 3x$, $f(x) = 2x + 3$ लेकर भी]

vr

(f) माना $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ तथा $f = \{(x, y) : y = x + 3\}$ अर्थात् $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ A से B पर एक फलन है, तो सिद्ध करो कि f एकैकी है परन्तु आच्छादक नहीं है

(g) यदि $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ इस प्रकार है कि $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ या $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{यदि } x < 0 \\ 0 & \text{यदि } x = 0 \\ 1 & \text{यदि } x > 0 \end{cases}$ सिद्ध करो कि चिन्ह फलन f न तो एकैकी है न आच्छादक है

अतिरिक्त प्रश्न:->

(a) यदि $R = \{(1,2), (2,2), (1,1), (4,4), (1,3), (3,3), (3,2)\}$ समुच्चय $\{1, 2, 3, 4\}$ एक संचाल है, तो सिद्ध करो कि R स्वतुल्य एवं संक्रामक है परन्तु सममित नहीं है।

(b) यदि $f: R \rightarrow R$ और $g: R \rightarrow R$ फलन क्रमशः $f(x) = \cos x, g(x) = \tan x$ तब $g \circ f, f \circ g, f \circ f$ तथा $f \cdot f$ का मान ज्ञात करो।

(c) सिद्ध करो कि वास्तविक संख्याओं R में संबंध $R = \{(a,b) : a \leq b\}$ स्वतुल्य तथा संक्रामक है परन्तु सममित नहीं है।
[Note:- इस प्रश्न में $a \leq b$ के स्थान पर $a = b$ or $a \geq b$ or $f(a) = f(b)$

अध्याय-2 [प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन]

[वस्तुनिष्ठ प्रश्न = 04
अंक 2 के प्रश्न = 01]

अंक 2 के प्रश्न [परीक्षा के प्रश्न पत्र में प्रश्न क्रं. 7 पूछा जायेगा]

सूत्र-1 प्रश्न 7 निम्नलिखित को सरलतम रूप में लिखो:-

(a) $\tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ (b) $\tan^{-1} \left(\frac{1+\cos x}{\sin x} \right)$ (c) $\tan^{-1} \left(\frac{\cos x}{1-\sin x} \right)$ (d) $\tan^{-1} \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \right)$

(e) $\tan^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \right)$ (f) $\tan^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right\}$ (g) $\sin [2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}]$

(h) $\sin (2x \sqrt{1-x^2})$ "अध्याय" (i) $\tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \right)$ (j) $\tan^{-1} \left(\frac{3a^2x-x^3}{a^3-3ax^2} \right)$

सूत्र-2 प्रश्न 7 (ii) मुख्य मान ज्ञात करो:-

(i) $\tan^{-1} \sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ (ii) $\tan^{-1} \sqrt{3} - \cot^{-1}(-\sqrt{3})$
(iii) $\sin^{-1}(\sin \frac{2\pi}{3}) + \tan^{-1} \tan(\frac{3\pi}{4})$ (iv) $\cos^{-1}(\cos \frac{7\pi}{6})$

(v) $\sin^{-1} \sin \frac{7\pi}{6} \rightarrow \text{Ans } -\pi/6$

(k) सिद्ध करो कि (i) $\tan^{-1} x = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$ (ii) $\tan \frac{1}{2} \left[\sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} + \cos^{-1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) \right]$

(iii) $\tan^{-1} \frac{x}{y} = \tan^{-1} \left(\frac{x-y}{x+y} \right) = \pi/4$ (iv) $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{x+y}{1-xy}$

(v) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2, x \in [-1, 1]$ (vi) $3 \cos^{-1} x = \cos^{-1}(4x^2-3x), x \in [\frac{1}{2}, 1]$

(vii) $\cos^{-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right) - \tan^{-1} x = \pi/4$

अतिरिक्त (a) सिद्ध करो कि:- $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{2}{11} = \tan^{-1} \frac{3}{4}$

(b) सिद्ध करो कि (i) $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \pi/4$

(ii) $\tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3 = \frac{3\pi}{4}$

(c) निम्न समीकरणों को हल करो:-

(i) $\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \frac{\pi}{4}$ (ii) $\tan^{-1} x + 2 \cos^{-1} x = \frac{2\pi}{3}$ Ans $x = -1, 1/6$

(iii) $\tan^{-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = \frac{1}{2} \tan^{-1} x$ Ans $x = \sqrt{3}$

(d) सिद्ध करो कि (i) $\cos^{-1} \sqrt{x} + \cos^{-1} \sqrt{1-x} = \pi/2$ (ii) $\tan^{-1} \left(\frac{a-b}{1+ab} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{b-c}{1+bc} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{c-a}{1+ca} \right) = 0$

- अंक 2 के प्रश्न [परीक्षा में प्रश्न क्र. 8 निम्न प्रश्नों में से प्रदा जारा है]
- (a) यदि $x \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$ तब x तथा y के मान ज्ञात करो
- (b) समीकरण $2 \begin{bmatrix} x & z \\ 8 & x \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ को हल करो
- (c) यदि $x + y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $x - y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ तब x तथा y ज्ञात करो

- (d) यदि $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$ तब
- (i) AB तथा BA ज्ञात करो क्या $AB = BA$ (ii) AB तथा BA में अन्तर्वर्ती की संख्या
- (iii) $(AB)' = B'A'$ तथा $(A')' = A$ का सत्यापन करो (iv) $(A + 2B)'$ = ?
- (e) यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ तब निम्नलिखित का सत्यापन करो:-
- (i) $(A+B)' = A' + B'$
- (ii) $A + A'$ सममित तथा $A - A'$ विषम सममित होता है
- (iii) आब्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ को एक सममित तथा असममित आब्यूहों के योगफल के रूप में लिखो

"अथवा"

- Ques 8 (d) यदि $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ तब सत्यापन करो
- (i) $(A+B)' = A' + B'$
- (ii) $(A+B)'' = ?$
- (e) यदि $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ हो, तब
- (i) सिद्ध करो कि A लाम्बिक आब्यूह है अर्थात् $AA' = A'A = I_2$
- (ii) x का मान ज्ञात करो यदि $A + A' = I$ हो (iii) $A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$
- (f) सिद्ध करो कि $\cos \theta \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} + \sin \theta \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} = I_2$
- (g) यदि 2×2 के आब्यूह $A = [a_{ij}]$ की रचना करो जबकि $a_{ij} = \frac{1}{2} |i-j|$
- (h) यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ तथा $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $A^2 = KA - 2A$ तब $K = ?$

अतिरिक्त प्रश्न:-

- (a) x तथा y के मान ज्ञात करो यदि $y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ तथा $2x + y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
- (b) x का मान ज्ञात करो यदि $[x \ -5 \ -1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ or $[0 \ 0]$
- (c) यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ x & -3 & 0 \end{bmatrix}$ विषम सममित आब्यूह हो, तो x का मान ज्ञात करो
- (d) यदि $A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ प्रतिकेन्द्रित आब्यूह हो अर्थात् $A^2 = I$ हो तब $x = ?$

अध्याय-4 (सारणिक)

अंक 3 या 4 के प्रश्न [परीक्षा के प्रश्न पत्र में प्रश्न क्र 20 या 21 पूरे जायें]

प्रश्न 20 (9) यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ हो, तो

Solve-1

- (i) सहस्रवृत्त A^{-1} तथा A का व्युत्क्रम A^{-1} ज्ञात करो
- (ii) $A(\text{सहस्रवृत्त } A) = (\text{सहस्रवृत्त } A)A = |A|I_2$ का सत्यापन करो
- (iii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ का सत्यापन करो
- (iv) $A^2 - 5A + 7I = 0$ का सत्यापन करो तथा इस परिणाम की सहायता से A^{-1} ज्ञात करो

(b) आब्यूह विधि से निम्न लिखित समीकरण युग्म (निकात) को हल करो

(i) $2x + 5y = 1$
 $3x + 2y = 7$

(ii) $3x - 2y + 3z = 8$
 $2x + y - z = 1$
 $4x - 3y + 2z = 4$

[Hint - by using Formula $AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B$]

(c) यदि शीर्ष $(2, -6)$, $(5, 4)$ तथा $(K, 4)$ शीर्ष वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई है, तब K का मान ज्ञात करो $\text{Ans } K=12, -$
"अथवा"

प्रश्न 20 (iv) सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ का मान द्वितीय पंक्ति के

सहस्रवृत्त (Cofactors) की सहायता से ज्ञात करो।

साथ ही $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0$ का सत्यापन करो।

(e) सारणिक की सहायता से त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसके शीर्ष $(-2, -3)$, $(3, 2)$ तथा $(-1, -8)$ हैं।

अतिरिक्त प्रश्न :-

(a) सारणिक की सहायता से सिद्ध करो कि $(a, b+c)$, $(b, c+a)$ $(c, a+b)$ समरेख हैं।

(b) सारणिक की सहायता से बिन्दुओं $(1, 2)$ तथा $(3, 6)$ को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात करो।

(c) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ हो, सिद्ध करो कि $|3A| = 27|A|$

(d) आब्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ के लिए a तथा b के मान ज्ञात करो जबकि $A^2 + aA + bI = 0$ हो

परीक्षा के प्रश्न पत्र में अंक 2 का प्रश्न क्र. 9 तथा अंक 4 का प्रश्न 21 प्रश्न जम्मा

वस्तुनिष्ठ = 02
अंक 2 के प्रश्न = 01
अंक 4 के प्रश्न = 01
कुल अंक = 8

[अंक 2 के प्रश्न]

प्रश्न 9 निम्न लिखित का x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए।

- (a) $\frac{e^x}{\sin x}$ (b) $\frac{\cos x}{\log_e x}$ (c) $\log_e \sin e^x$ (d) $\log_e \log_e (\sin x)$ (e) $\cos^{-1} e^{-x}$
(f) $\sin \{ \tan^{-1}(e^{-x}) \}$ (g) $(\log_e x)^{\cos x}$ (h) $x^{\sin x}$ (i) a^x (j) $\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}$
(k) $\tan^{-1} \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right)$ (l) $\cos^{-1} \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ (m) $\sqrt{e^x}$

"अथवा"

प्रश्न 9 (क) $\sin^{-1} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)$ का $\cos^{-1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$ के सापेक्ष अवकलन ज्ञात करें।

- (I) यदि $x = at^2$, $y = 2at$ हो, तो सिद्ध करें कि $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}$
(II) यदि $y + \sin y = \cos x$ हो, तो सिद्ध करें कि $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{1 + \cos y}$
(III) यदि $y = A \sin mx + B \cos mx$ हो, सिद्ध करें कि $\frac{d^2y}{dx^2} + m^2y = 0$
(IV) यदि $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ का $x = \cos^3 \theta$, $y = \sin^3 \theta$ माने सिद्ध करें कि $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$
(V) यदि $y^x = x^y$ हो, तो सिद्ध करें कि $\frac{dy}{dx} = \frac{y(y-x \log y)}{x(x-y \log x)}$
(VI) यदि $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$ हो, तो सिद्ध करें कि $\frac{dy}{dx} = -\frac{b \sin \theta}{a \cos \theta} = -\frac{y}{x}$
(VII) यदि $y = \tan^{-1} \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)$ हो, तो सिद्ध करें कि $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$

[अंक-04 के प्रश्न]

प्रश्न 21 (a) निम्न लिखित फलनों का सातत्य (संतत और असंतत) परीक्षण करें।

- (i) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0 & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$ संतत है।
(ii) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{यदि } x \leq -1 \\ 2x & \text{यदि } -1 < x \leq 1 \\ 2 & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$
(iii) $f(x) = |x|$ का $x=0$ पर सातत है परन्तु अवकलनीय नहीं है।
(iv) $f(x) = |x-2| \rightarrow$
(v) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{जब } x \neq 0 \\ x+1 & \text{जब } x \geq 0 \end{cases}$ संतत है।

Sure-1

- (b) k के किस मान के लिए फलन $f(x) = \begin{cases} \frac{k \cos x}{x-2x} & \text{यदि } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 3 & \text{यदि } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ संतत है।
(c) a तथा b के किस मान के लिए फलन $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{यदि } x \leq 2 \\ ax+b & \text{यदि } 2 < x < 10 \\ 21 & \text{यदि } x \geq 10 \end{cases}$ संतत है "अथवा"

- प्रश्न 21 (क) यदि $x = a(\theta + \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ हो, सिद्ध करें $\frac{dy}{dx} = \tan \frac{\theta}{2}$
(ख) यदि $y = \sin^{-1} x$ हो, तो सिद्ध करें कि $(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 0$
(ग) यदि $\cos y = x \cos(a+y)$ हो, तो सिद्ध करें कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$
(घ) यदि $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ हो, तो सिद्ध करें कि $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$

- अतिरिक्त प्रश्न: (a) परीक्षण करें कि $\sin^{-1} x$ तथा $|\cos x|$ संतत फलन हैं।
(b) $y = a \cos(\log x) + b \sin(\log x)$ हो, तब सिद्ध करें $x^2 y'' + x y' + y = 0$
(c) यदि $y = \cos^{-1} x$ तब $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान y के पदों में ज्ञात करें $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos y}{x^2}$

[अध्याय-6] [अवकलज के अनुप्रयोग]

वस्तुमि...
अंक 2 के अ...
कुल अंक...

परीक्षा के प्रश्न पत्र में प्रश्न क्र. 10 तथा 11 प्रत्येक अंक 2 का अंक प्रदान किया जायेगा।

[अंक 2 के प्रश्न]

- प्रश्न 10 (a) एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है, की त्रिज्या r और आयतन V का संबंध $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ है। त्रिज्या के सापेक्ष आयतन में परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जबकि त्रिज्या 10 cm है। पृष्ठ में परिवर्तन की दर भी ज्ञात कीजिए।
- (b) हवा के एक बुलबुले की त्रिज्या $\frac{1}{2}\text{ cm/s}$ की दर से बढ़ रही है। बुलबुले का आयतन किस दर से बढ़ रहा है जबकि त्रिज्या 1 cm है।
- (c) एक स्थिर झील में एक पत्थर डाला जाता है और तरंगें वृत्तों में 4 सेमी. / सेकण्ड की गति से चलती हैं। जब वृत्तों की त्रिज्या 10 सेमी. है, तो उस क्षण, घिरा हुआ क्षेत्रफल किस तेजी से बढ़ रहा है। [Hint क्षेत्र $A = \pi r^2$, परिधि $= 2\pi r$]
- (d) किसी आयत की लम्बाइयों x , 3 cm/min की दर से घट रही है और चौड़ाई y , 2 cm/min की दर से बढ़ रही है। जब $x=10$ और $y=6\text{ cm}$ हैं तब आयत के परिमाण तथा क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर ज्ञात करो।

"अथवा"

- प्रश्न 10 (a) एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है, एक पंप द्वारा 900 cm^3 गैस प्रति सेकण्ड भरकर फुलाया जाता है। गुब्बारे का आकार (त्रिज्या) के परिवर्तन की दर ज्ञात करो जब त्रिज्या 15 cm है।
- (b) एक परिवर्तनशील घन का किनारा 3 सेमी. / सेकण्ड की दर से बढ़ रहा है। घन का आयतन तथा पृष्ठ किस दर से बढ़ रहा है, जबकि किनारा 10 cm लम्बा है।

प्रश्न 11 (a) दिखाइए कि निम्न लिखित फलनों $f(x)$, R में अर्थात् $(-\infty, \infty)$ में वर्धमान या ह्रासमान हैं।

- (i) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$ (ii) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$ $x \in R$
- (b) अन्तर्गल करो जिसमें निम्न फलनों $f(x)$ का प्रदत्त फलन $F(x)$ वर्धमान है (c) वर्धमान है (d) ह्रासमान है
- (c) सिद्ध करो कि $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$ से प्रदत्त फलन
- (i) $(1, 2)$ में वर्धमान है (ii) $(0, 1)$ में ह्रासमान है
- (iii) $(0, 2)$ में न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है

"अथवा"

प्रश्न 11 (a) निम्नलिखित फलनों के स्थानीय उच्चतम और स्थानीय निम्नतम के अनिच्छु ज्ञात करो तथा निम्नतम मान भी ज्ञात करो। तथा उच्चतम (उच्चतम)

- (i) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$ (ii) $2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$
- (b) सिद्ध करो कि $\sin x + \cos x$ का उच्चतम मान $\sqrt{2}$ होगा।
- (c) यदि लाभ फलन $P(x) = 41 - 72x + 18x^2$ है, तो किसी कंपनी द्वारा अर्जित उच्चतम लाभ ज्ञात करो।

Score-1

Score-17

(a) $y = x(5-x)$, x के किस मान के लिए उच्चतम या निम्नतम है। उच्चतम मान भी शोध करो।

(b) a का वह न्यूनतम मान ज्ञात करो जिसके लिए अन्तराल $[1, 2]$ में $f(x) = x^2 + ax + 1$ से प्रदत्त फलन वर्धमान है।

(c) अन्तराल $[1, 5]$ में $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ द्वारा प्रदत्त फलन के निरपेक्ष उच्चतम व निम्नतम मानों को शोध करो।

(d) दो ऐसी धनात्मक संख्याएँ ज्ञात करो जिनका योगफल K है जबकि (i) वही योग न्यूनतम हो जहाँ K धनात्मक है।

(ii) संख्याओं का गुणनफल महत्तम है। [Note: K के स्थान पर 15, 24 आदि रखकर भी पूछा जा सकता है।]

(e) सिद्ध करो कि महत्तम क्षेत्रफल वाला आयत वर्ग है।
अध्याय 7 [समाकलन (Integration)]

वस्तुनिष्ठ = 06
अंक 2 के प्रश्न = 01
अंक 4 का प्रश्न = 01
कुल अंक = 12

[परीक्षा के प्रश्न पत्र में अंक 2 का प्रश्न क्र. 12 तथा अंक 4 का प्रश्न क्र. 22 पूछा जाएगा]

[अंक 2 के प्रश्न]

प्रश्न 12 निम्नलिखित का मान ज्ञात करो:-

- (i) $\int \frac{x^3-1}{x^2} dx$ (ii) $\int (1-x)\sqrt{x} dx$ (iii) $\int \frac{2-3\sin x}{\cos^2 x} dx$ (iv) $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x \cos^3 x} dx$
- (v) $\int \frac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$ (vi) $\int \sin 3x \cos 3x dx$ (vii) $\int \sqrt{1+\sin 2x} dx$
- (viii) $\int (\tan x + \cot x)^2 dx$ (ix) $\int \frac{e^x(x+1)}{\cos(x-e^x)} dx$ (x) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

- Sub-1
- (b) (i) $\int_0^1 x e^x dx$ (ii) $\int_0^{\pi/2} x \sin x dx$ (iii) $\int x \sec^2 x dx$ (iv) $\int x \tan^2 x dx$
 - (v) $\int_1^e \log_e x dx$ (vi) $\int e^x \sin x dx$ (vii) $\int e^x (\sin x + \cos x) dx$
 - (viii) $\int_1^e e^x \left(\tan^{-1} x + \frac{1}{1+x^2} \right) dx$ (ix) $\int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx$ (x) $\int \frac{dx}{a \sin^2 x + b \cos^2 x}$

"आधवा"

- प्रश्न 12 (d)
- (i) $\int \frac{(\log_e x)^2}{x} dx$ (ii) $\int \frac{1}{x \log_e x} dx$ (iii) $\int \frac{1}{x+x \log_e x} dx$ (iv) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
 - (v) $\int \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2} dx$ (vi) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x}$ (vii) $\int \cos^{-1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) dx$
 - (viii) $\int \sec x (\sec x + \tan x) dx$ (ix) $\int \frac{\sec x}{\sec x + \tan x} dx$ (x) $\int \frac{\sec x}{\log_e (\sec x + \tan x)} dx$

[अंक 4 के प्रश्न]

Sub-1
प्रश्न 22 सिद्ध करो कि:-

- (a) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos^n x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \frac{\pi}{4}$ जहाँ $n = 1, 2, 3, \dots, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ हो सकता है।
- (b) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \frac{\pi}{4}$
- (c) $\int_0^1 \frac{\log_e(1+x)}{1+x^2} dx = \int_0^{\pi/4} \log_e(1+\tan \theta) d\theta = \frac{\pi}{8} \log_e 2$ [Hint: put $x = \tan \theta$]

(v) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\sec x + \tan x} dx = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \pi^2/4$

(e) $\int_0^{\pi/2} \log_e(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \log_e \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{2} \log_e 2$

"अथवा"

(f) $\int_{-5}^5 |x+2| dx = 29$

प्रश्न 22 निम्नालिखित का मान ज्ञात करो:

- (i) $\int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$ (ii) $\int \frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^2} dx$ (iii) $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (iv) $\int x \tan^{-1} x dx$
- (v) $\int \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x} dx$ (vi) $\int \frac{x + \sin x}{1+\cos x} dx$ (vii) $\int_0^1 \sin^{-1} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) dx$
- (viii) $\int_0^1 (x e^x + \sin \frac{\pi x}{4}) dx$ (ix) $\int \frac{1}{x(x^n+1)} dx$ (x) $\int_0^2 x \sqrt{2-x} dx$
- (xi) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$ (xii) $\int \sec^3 x dx$

[Hint: अंशव ल 2 में e^x का भाग देकर put $e^x + e^{-x} = t$

Sure-1

- (k) (i) $\int \frac{dx}{3x^2+13x-10}$ (ii) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{2x^2+x-1}} dx$ (iii) $\int \sqrt{x^2-8x+7} dx$

अध्याय-8 [समाकलन] अनुप्रयोग

वरतुनिक प्रश्न=00
अंक 3 के प्रश्न=01
कुल अंक=03

[परीक्षा के प्रश्न पत्र में प्रश्न क्र. 16 निम्न प्रश्नों में से पूछा जायेगा] [अंक-3 के प्रश्न]

Sure-1

प्रश्न 16 (क) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करो?

[नोट:- इसी प्रकार हम $x^2 + 4y^2 = 36$ को $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ अर्थात् $\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ लिखकर हम क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं। यहाँ $a=6, b=3$

(ख) वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का प्रथम चतुर्थांश (एक चतुर्थांश) में क्षेत्रफल ज्ञात करो।

[नोट:- इसी प्रकार हम वृत्तों $x^2 + y^2 = 1$ $x^2 + y^2 = 4$ के क्षेत्रफल को क्रमशः $x^2 + y^2 = r^2$ तथा $x^2 + y^2 = 2^2$ लिखकर ज्ञात कर सकते हैं। यहाँ $a=1$ यहाँ $a=2$

(ग) वक्र $y^2 = 4x$ एवं रेखा $y = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

[Hint: $y^2 = 4x \Rightarrow x = \frac{y^2}{4}$ एवं अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^3 x dy = \int_0^3 \frac{y^2}{4} dy$ का] [अथवा] [Ans $\frac{9}{4}$ का मात्रक]

प्रश्न 16 (घ) परवलय $y^2 = 4ax$ तथा नाभिलम्ब जीवा (अर्थात् रेखा $x=a$) के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

[नोट:- इसी प्रकार हम परवलय $y^2 = 4x$ एवं रेखा $x=3$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं।

(च) वक्र $y = x^2$ एवं रेखा $y = 4$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

[Hint: $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$ एवं अभीष्ट क्षेत्रफल $= 2 \int_0^4 x dy = 2 \int_0^4 \sqrt{y} dy$

(द) वक्र $y = \cos x$ का (i) $x=0$ एवं $x=\frac{\pi}{2}$ के मध्य भाग का क्षेत्रफल (ii) $x=0$ एवं $x=2\pi$ के मध्य भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करो। [Note वक्र $y = \sin x$ लेकर भी पूछा जा सकता है] [Ans $\frac{32}{3}$ का मात्रक]

अध्याय-9

अवकल समीकरण

वरतुनिक = 03

अंक 3 का अंश = 01

कुल अंक = 6

[परीक्षा के अंश पर मैं अंश कुल 17 पूछा जायेगा]

प्रश्न 16 निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल करो।

(a) यहाँ के पथकरण द्वारा: \rightarrow (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$, जहाँ $y(0) = 1$ या $x=0$ $y=1$

(b) $\sec^2 x \cdot x y n y dx + \sec^2 y \cdot y n n x dy = 0$ (c) $(e^x + e^{-x}) dy - (e^x - e^{-x}) dx = 0$

(d) $e^x x y n y dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy = 0$

सैविक समीकरण: \rightarrow

(e) $\frac{dy}{dx} - y = \cos x$

[यहाँ $\cos x$ के स्थान पर $\sin x, x, e^x, e^{3x}$ रखकर भी पूछा जा सकता है]

(f) $x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2$

[यहाँ x^2 के स्थान पर $\sin x, e^x, \sec^2 x$ भी ले सकता है]

(g) $\cos x \frac{dy}{dx} + y = \sin x$ या $\frac{dy}{dx} + (\sec x) y = \tan x$

(h) $(1+x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{1}{1+x^2}$ [यहाँ $\frac{1}{1+x^2}$ के स्थान पर $\sin x, \tan x, e^x, x^2$ भी हो सकता है]

उपरोक्त जहाँ $y(1) = 0$ अर्थात् $x=1, y=0$

[Note: सैविक समीकरणों (e) (f) (g) (h) के समाकलन गुणक

क्रमशः $e^{-x}, x^2, \sec x, \frac{1}{1+x^2}$ वस्तुनिक के रूप में पूछे जायेंगे

"अथवा"

प्रश्न 16 निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल करो: \rightarrow

(a) $x^2 y - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ (b) $(x^2 - y^2) dx + 2xy dy = 0$

(c) $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = x + y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{x+y}$

(d) $\cos x \frac{dy}{dx} + y \sin x = 1$ या $\frac{dy}{dx} + y \sec x = \sec x$

(1) बिन्दु $(-2, 3)$ से गुजरने वाले वक्र का समीकरण ज्ञात करो, जिसके किसी बिन्दु पर स्पर्शरेखा की षण्णता $\frac{2x}{y^2}$ है

अतिरिक्त: \rightarrow (a) $\cos\left(\frac{y}{x}\right) = a$, where $y(0) = 1$ or $x=0, y=1$

(b) हल करो $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$

(c) $(1+e^{2y}) dy + (1+y^2) e^x dx = 0$ जहाँ $y(0) = 1$

अध्याय - 10 [सदिश बीजगणित]

[परीक्षा के प्रश्न पत्र में अंक 2 का प्रश्न 13 तथा 14 पूछे जायेंगे]

वस्तुनिष्ठ प्रश्न = 03
अंक 2 के प्रश्न = 02
कुल अंक = 07

प्रश्न 13 (a) यदि $\vec{v} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ हो, तो

(i) $|\vec{v}|$, $|\vec{b}|$, $\vec{v} + \vec{b}$, $|\vec{v} + \vec{b}|$, $\vec{v} \cdot \vec{b}$, $\vec{v} \times \vec{b}$ तथा $|\vec{v} \times \vec{b}|$ ज्ञात करो।

(ii) $\vec{v} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ के अनुदिश मात्रक (यूनिट) सदिश ज्ञात करो। साथ ही $\vec{v} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ के अनुदिश ऐसा सदिश ज्ञात करो जिसका परिमाण 7 इकाई हो।

[Hint] \vec{v} के अनुदिश यूनिट सदिश = $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ तथा \vec{v} के अनुदिश परिमाण 7 का सदिश = $7 \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

(iii) सदिश $\vec{v} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ का $\vec{b} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात करो। साथ ही सिद्ध करो कि सदिश \vec{v} तथा \vec{b} के बीच का कोण $\cos^{-1} \sqrt{3/7}$ है।

[Hint] \vec{v} का \vec{b} पर प्रक्षेप = $\frac{\vec{v} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$ और $\cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{b}}{|\vec{v}| |\vec{b}|}$ जहाँ \vec{v} तथा \vec{b} के बीच का कोण θ है।

(iv) सिद्ध करो कि सदिशों \vec{v} और \vec{b} दोनों पर लम्ब मात्रक सदिश $\frac{1}{\sqrt{3}}(-\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})$ होगा तथा इनके बीच का कोण $\sin^{-1}(\frac{2}{\sqrt{7}})$ होगा।

[Hint] सदिशों \vec{v} तथा \vec{b} प्रत्येक पर लम्ब मात्रक सदिश = $\frac{\vec{v} \times \vec{b}}{|\vec{v} \times \vec{b}|}$ और $\sin \theta = \frac{|\vec{v} \times \vec{b}|}{|\vec{v}| |\vec{b}|}$

(v) सदिशों \vec{v} तथा \vec{b} के योग $\vec{v} + \vec{b}$ की दिशा में इकाई सदिश ज्ञात करो। [Hint] \vec{v} तथा \vec{b} के योग की दिशा में इकाई सदिश = $\frac{\vec{v} + \vec{b}}{|\vec{v} + \vec{b}|}$

(b) यदि बिन्दु P (1, 2, 3) तथा Q (4, 5, 6) हो, तो निम्न लिखित को ज्ञात करो:-

(i) सदिश \vec{PQ} के अनुदिश मात्रक सदिश। [Hint] $\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = 3(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

(ii) सदिश \vec{PQ} के अदिश तथा सदिश घटक। [Hint] $\vec{PQ} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$

(iii) सदिश \vec{PQ} के अदिश बिन्दु का स्थिति सदिश = $\vec{OP} + \vec{PQ} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}$ तथा सदिश घटक 3, 3, 3

(iv) सदिश \vec{PQ} के दिक् अनुपात और इसके द्वारा \vec{PQ} की दिक् कोणों को ज्ञात करो।

(c) यदि सदिशों \vec{v} तथा \vec{b} के परिमाण क्रमशः 1 तथा 2 और $\vec{v} \cdot \vec{b} = 1$ हो, तो सिद्ध करो कि \vec{v} तथा \vec{b} के बीच का कोण 60° होगा। [Hint] (i) $\cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{b}}{|\vec{v}| |\vec{b}|}$ (ii) $|\vec{v} \times \vec{b}| = |\vec{v}| |\vec{b}| \sin \theta$ (iii) $|\vec{v} + \vec{b}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{b}$

प्रश्न 14 (a) यदि $\vec{v} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{c} = -4\hat{i} + 4\hat{j} - 8\hat{k}$ हो, तो

(i) $\vec{v} \cdot \vec{b}$, $\vec{v} \times \vec{b}$, $|\vec{v} \times \vec{b}|$ ज्ञात करो। [Hint] प्रश्न 13 (a) के (i) भाग को हल करो।

(ii) यदि \vec{v} तथा \vec{b} त्रिभुज की दो संलग्न भुजाओं के सदिश हो, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो। [Hint] त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} |\vec{v} \times \vec{b}|$

(iii) यदि \vec{v} तथा \vec{b} समांतर चतुर्भुज की दो संलग्न भुजाओं के सदिश हो, तो समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो। [Hint] समा. च. का क्षेत्र = $|\vec{v} \times \vec{b}|$

(iv) यदि \vec{v} तथा \vec{b} किसी चतुर्भुज के विकर्णों के सदिश हो, चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो। [Hint] चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} |\vec{v} \times \vec{b}|$

(v) दर्शाइये कि सदिश \vec{b} तथा \vec{c} संरेख हैं। [Hint] $\vec{c} = -4\hat{i} + 4\hat{j} - 8\hat{k} = -2(2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) = -2\vec{b}$ अतः \vec{b} तथा \vec{c} संरेख हैं।

(vi) क्या सदिश \vec{v} तथा \vec{b} परस्पर लम्बवत् हैं? यदि हाँ तो $\vec{v} \cdot \vec{b} = 0$ हो, तब \vec{v} लम्ब \vec{b} होगा। [Hint] यदि $\vec{v} \cdot \vec{b} = 0$ हो, तब \vec{v} लम्ब \vec{b} होगा।

(b) यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{k}$, $\vec{d} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ हो, तो \vec{a} का मान ज्ञात करो यदि (i) \vec{b} लम्ब \vec{a} हो (ii) $\vec{b} \parallel \vec{a}$ हो (iii) $\vec{a} + \vec{b}$ लम्ब \vec{c} हो

(c) यदि \vec{a} एक मात्रक सदिश है और $(\vec{x} + \vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 8$ हो, तो $|\vec{x}|$ ज्ञात करो। [Hint] $|\vec{x}|^2 - |\vec{a}|^2 = 8 \Rightarrow |\vec{x}|^2 - (1)^2 = 8 \Rightarrow |\vec{x}|^2 = 9 \Rightarrow |\vec{x}| = 3$

प्रश्न 14 (क) सिद्ध करो कि संदिश $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ निर्देशकों OX, OY, OZ के साथ समान कोण बनाता है।

[माना:- $\vec{v} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तब $\cos \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \hat{i}}{|\vec{v}|}$, $\cos \beta = \frac{\vec{v} \cdot \hat{j}}{|\vec{v}|}$, $\cos \gamma = \frac{\vec{v} \cdot \hat{k}}{|\vec{v}|}$ द्वारा $\alpha = \beta = \gamma = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$ प्राप्त होगा।

(ख) यदि $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$ तथा $\vec{a} \times \vec{b}$ मात्रक संदिश हो, तब \vec{a} तथा \vec{b} के बीच का कोण ज्ञात करो। [माना $\sin \theta = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$]

(ग) सिद्ध करो कि (i) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$
(ii) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$ यदि \vec{a} लम्ब \vec{b} हो

अतिरिक्त प्रश्न :- (क) दर्शाइए कि बिन्दु $A(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$, $B(\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k})$, $C(3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k})$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं। ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

(ख) दर्शाइए कि बिन्दु $A(-2, 3, 5)$, $B(1, 2, 3)$, $C(7, 0, -1)$ संरेख हैं।

(क) यदि $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ हो, तो

- (i) सिद्ध करो कि $\vec{a} + \vec{b}$ तथा $\vec{a} - \vec{b}$ परस्पर लम्बवर्त हैं।
- (ii) $\vec{a} + \vec{b}$ तथा $\vec{a} - \vec{b}$ प्रत्येक पर लम्ब मात्रक संदिश ज्ञात करो।
- (iii) $2\vec{a} + \vec{b}$ तथा $\vec{a} + 2\vec{b}$ के बीच का कोण ज्ञात करो।

(ख) ~~यदि \vec{a} तथा \vec{b} संरेख हों तब $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ ।~~

~~अर्थात् $(2\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}) \times (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 0$~~
[माना:- $\vec{a} \parallel \vec{b}$ हो तब $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Rightarrow (2\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}) \times (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 0$]

(क) यदि $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$ तथा $|\vec{a} \times \vec{b}| = 8$ हो, तो $\vec{a} \cdot \vec{b}$ का मान ज्ञात करो।

(ख) सिद्ध करो कि $\sin \theta/2 = \frac{1}{2} |\vec{a} - \vec{b}|$, जहाँ \vec{a} तथा \vec{b} मात्रक संदिश हैं।

[अध्याय - 11] [त्रिविमीय ज्यामिति]

वस्तुनिष्ठ = 01	= 7 अंक
अंक 2 के प्रश्न = 04	
अंक 4 के प्रश्न = 01	

[परीक्षा के प्रश्न पत्र में अंक 2 का प्रश्न क्र. 15 तथा अंक 4 का प्रश्न क्र. 23 पूछा जाएगा]

[अंक 2 के प्रश्न]

प्रश्न 15 (क) दो बिन्दुओं $(2, -1, -4)$ और $(4, 1, -6)$ को मिलाने वाली रेखा की दिक् कोज्याएँ तथा रेखा का कार्तीय तथा सदिश समीकन ज्ञात करो।

(ख) त्रिभुजाकार क्षेत्र $A(2, 3, -4)$, $B(1, -3, 3)$ और $C(3, 8, -11)$ द्वारा सिद्ध करो कि बिन्दु $(2, 3, -4)$ के

(क) रेखाओं $\frac{5-x}{-1} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$ और $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ के बीच का कोण ज्ञात करो। सिद्ध करो कि रेखाएँ परस्पर लम्ब हैं। [कार्तीय तथा सदिश विधि द्वारा]

(ख) सिद्ध करो कि निर्देशकों से समान कोण बनाने वाली रेखा की दिक् कोज्याएँ $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ होंगी। (संदिश)

(क) यदि रेखाएँ $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$ और $\frac{x-1}{3k} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-5}$ परस्पर लम्ब हों, तो k का मान ज्ञात करो।

(ख) बिन्दु $(-2, 4, -5)$ से गुजरने वाली उस रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात करो जो रेखा $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+8}{6}$ के समान्तर है।

अथवा

प्रश्न 15 (g) बिन्दु (5, 2, -4) से जाने वाली तथा सदिश $3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$ के समान्तर रेखा का सदिश रूपा कार्तीय समीकरण ज्ञात करो।

समान्तर रेखा का सदिश रूपा कार्तीय समीकरण ज्ञात करो।
 बिन्दुओं $(-1, 0, 2)$ और $(3, 4, 6)$ से होकर जाने वाली रेखा का सदिश रूपा कार्तीय समीकरण ज्ञात करो।

रेखाओं $\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4}$ और $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{5-z}{-2}$ के बीच का कोण ज्ञात करो।

यदि कोई रेखा निर्देशाक्षों के साथ क्रमशः α, β, γ कोण बनाती है तब सिद्ध करो: (i) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$ (ii) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \cos^2 \gamma = 1$

[अंक 4 के प्रश्न]

Sub-1

प्रश्न 23 निम्न लिखित रेखा युग्म के बीच की न्यूनतम दूरी (लम्बवत् दूरी) तथा इनके बीच का कोण ज्ञात करो:-

(a) $r = (1-t)\hat{i} + (t-2)\hat{j} + (3-2t)\hat{k}$ तथा $r = (s+1)\hat{i} + (2s-1)\hat{j} - (2s+1)\hat{k}$

Hint: रेखाओं के निम्न प्रकार लिखें।
 $r = (i - 2j + 3k) + t(-i + j - 2k)$ युग्म $d = \frac{(a_2 - a_1) \cdot (b_1 \times b_2)}{|b_1 \times b_2|}$

या $r = (i - j + k) + t(-i + j - 2k)$
 तथा $r = (i - j + k) + s(i + 2j - 2k)$
 (b) $r = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + t(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ और $r = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + u(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$

Hint: यदि $b_1 = b_2 = b$ रेखाएँ समान्तर हैं। अतः न्यूनतम दूरी को हम निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात करेंगे।
 $d = \frac{b \cdot (v_2 - v_1)}{|b|}$ Ans $\frac{\sqrt{293}}{7}$

(c) रेखाओं $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ और $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी तथा इनके बीच का कोण सदिश रूपा कार्तीय विधि द्वारा ज्ञात करो।

अतिरिक्त प्रश्न:-

प्रश्न 23 (a) एक रेखा, एक घन के विकर्णों के साथ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ कोण बनाती है, तो सिद्ध करो कि (i) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta = \frac{4}{3}$
 (ii) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + \sin^2 \delta = \frac{8}{3}$

(b) सिद्ध करो कि घन के किन्हीं दो विकर्णों के बीच का कोण $\cos^{-1}(\frac{1}{3})$ या $\sin^{-1}(2/\sqrt{2})$ होगा।

(c) बिन्दु (1, 2, -4) से जाने वाली रेखा का सदिश रूपा कार्तीय समीकरण ज्ञात करो जो रेखाओं $\frac{x-8}{3} = \frac{y+19}{-16} = \frac{z-10}{7}$ और $\frac{x-15}{3} = \frac{y-29}{8} = \frac{z-5}{-5}$ दोनों पर लम्ब है।

परीक्षा के प्रश्न पत्र में प्रश्न क्र. 18 पूछा जाएगा।

वस्तुनिष्ठ = 00
अंक 3 के प्रश्न = 01
कुल अंक 3

प्रश्न 18 (a) $Z = -3x + 4y$ एक उद्देश्य फलन है।

संभाव्य क्षेत्र (सुसंगत या इष्टतम क्षेत्र) के शीर्ष (कोणीय बिन्दुओं) के निर्देशांक $(4, 0)$, $(2, 3)$ तथा $(0, 4)$ हैं। उद्देश्य फलन का निम्नतम मान ज्ञात करो। **Ans** बिन्दु $(4, 0)$ पर निम्नतम मान $= -12$

(b) आलेख द्वारा निम्न रेखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए।
निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $x + y \leq 50$, $3x + y \leq 90$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
 $Z = 4x + y$ का अधिकतम मान ज्ञात करो। **Ans** $= 120$

(c) आलेखी विधि द्वारा निम्न रेखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए।
निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $x + 2y \geq 10$, $3x + 4y \leq 24$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
 $Z = 200x + 500y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए। **Ans** 2300

(d) निम्नलिखित अवरोधों के अन्तर्गत $x + y \geq 8$, $3x + 5y \leq 15$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
 Z का न्यूनतमीकरण कीजिए। **Ans** सुसंगत हल नहीं है

"अथवा"

प्रश्न 18 (e) आलेखी विधि से निम्न समस्या को हल कीजिए। निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $x + 3y \leq 60$, $x + y \geq 10$, $x \leq y$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
 $Z = 3x + 9y$ का न्यूनतम और अधिकतम मान ज्ञात करो।

Ans न्यूनतम मान $= 60$, अधिकतम (बहु इष्टतम) मान $= 180$

(f) निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $Z = 5x + 10y$ का न्यूनतमीकरण तथा अधिकतमीकरण कीजिए। $x + 2y \leq 120$, $x + y \geq 60$, $x - 2y \geq 0$, $x, y \geq 0$
Ans न्यूनतम मान $= 300$, अधिकतम (बहु इष्टतम) मान $= 600$

अध्याय - 13 [प्रायिकता]

[परीक्षा के प्रश्न पत्र में प्रश्न क्र. 19 पूछा जाएगा]

वस्तुनिष्ठ प्रश्न = 02 या 01
अंक 3 के प्रश्न = 01
कुल अंक 205

प्रश्न 19 (a) एक परिवार में दो बच्चे हैं। यदि यह ज्ञात हो कि बच्चों में से कम से कम एक बच्चा लड़का है, तो दोनों बच्चों के लड़का होने की क्या प्रायिकता है?

(b) एक बक्से में दस कार्ड 1 से 10 तक क्रमिक लिखकर रखे गए हैं और उन्हें अच्छी तरह मिलाया गया। इस बक्से से एक कार्ड यादृच्छया निकाला जाता है। यदि यह ज्ञात हो कि निकाले गए कार्ड पर संख्या 3 से अधिक है, तो इस संख्या के राश होने की क्या प्रायिकता है।

(c) एक पासे को दो बार उछाला गया और पकड़ हुई संख्याओं का योग 6 पाया गया। संख्या 4 के न्यूनतम एक बार पकड़ होने की सहप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

